



การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

ข้อตกลง กำหนดสัญลักษณ์ต่างๆให้ดังนี้

$\mathbb{C}$ แทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน

$\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง

$\mathbb{Q}$ แทนเซตของจำนวนตรรกยะ

$\mathbb{Q}'$ แทนเซตของจำนวนอตรรกยะ

$\mathbb{Z}$ แทนเซตของจำนวนเต็ม

$\mathbb{N}$ แทนเซตของจำนวนเต็มบวก

$\emptyset$ แทนเซตว่าง

สำหรับเซต A ใดๆ ที่เป็นจำกัด

$n(A)$ หมายถึงจำนวนสมาชิกของเซต A และ $P(A)$ หมายถึง เพาเวอร์เซตของ A

ตอนที่หนึ่ง ข้อ 1 – 12 ตอบถูกได้คะแนนข้อละ 4 คะแนน

ไม่ตอบได้คะแนนข้อละ 1 คะแนน ตอบผิดได้ 0 คะแนน

1. กำหนดให้ T, M, C เป็นเซตจำกัด และ จำนวนสมาชิกของเซตต่างๆเป็นดังตารางต่อไปนี้

เซต	T	M	C	$T \cap M$	$T \cap C$	$M \cap C$	$T \cap M \cap C$
จำนวนสมาชิก	25	20	30	12	15	10	5

จงหาจำนวนสมาชิกของ $(T \cup M) - C$

A. 3

B. 5

C. 10

D. 13

E. 15

2. กำหนดให้ t, m, c เป็นประพจน์

ให้พิจารณาประพจน์ต่อไปนี้

ประพจน์ที่ 1 คือ $(m \rightarrow (t \rightarrow m)) \rightarrow t$

ประพจน์ที่ 2 คือ $(t \leftrightarrow m) \leftrightarrow \sim(\sim t \vee m) \vee (\sim t \wedge m)$

ประพจน์ที่ 3 คือ $(t \rightarrow (m \vee c)) \rightarrow ((m \rightarrow c) \vee (c \rightarrow t))$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าวได้ถูกต้อง

A. ประพจน์ที่เป็นสัจนิรันดร์คือประพจน์ที่ 1 เท่านั้น

B. ประพจน์ที่เป็นสัจนิรันดร์คือประพจน์ที่ 2 เท่านั้น

C. ประพจน์ที่เป็นสัจนิรันดร์คือประพจน์ที่ 3 เท่านั้น

D. ประพจน์ที่เป็นสัจนิรันดร์คือประพจน์ที่ 1 และ 3 เท่านั้น

E. ทั้งสามประพจน์เป็นสัจนิรันดร์



การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

3. ให้พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- (1) π เป็นจำนวนตรรกยะ มีค่าเท่ากับ 3.14
- (2) $\sqrt{n}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n ที่มากกว่า 1
- (3) $\sqrt{n^2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ สำหรับทุกจำนวนจริง n
- (4) $x^2 \geq -1$ สำหรับทุกจำนวนจริง x ใดๆ

จงตรวจสอบว่าข้อความข้างต้นที่ถูกต้องอยู่ทั้งหมดกี่ข้อความ

- | | | |
|------|------|------|
| A. 0 | B. 1 | C. 2 |
| D. 3 | E. 4 | |

4. กำหนดให้ i, t, m, c เป็นจำนวนเต็มบวกที่แตกต่างกันหมด และสอดคล้องกับสมการ

$$2^i + 2^t + 2^m + 2^c = 106 \text{ โดยที่ } i > t > m > c$$

จงหาค่าของ $(i + t)(m + c)$

- | | | |
|-------|-------|-------|
| A. 30 | B. 33 | C. 40 |
| D. 44 | E. 47 | |

5. กำหนดให้พาราโบลา P_1 มีสมการคือ $x^2 - 40x - y + 419 = 0$

และ พาราโบลา P_2 มีสมการคือ $y^2 - 38y - x + 381 = 0$

จงหาจำนวนจุดตัดระหว่างพาราโบลา P_1 และ P_2

- | | | |
|------|------|------|
| A. 0 | B. 1 | C. 2 |
| D. 3 | E. 4 | |



การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

6. บทนิยาม เราจะกล่าวว่า ความสัมพันธ์ f เป็นฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อ

สำหรับ x, y, z ใดๆ ถ้า $(x, y) \in f$ และ $(x, z) \in f$ แล้ว $y = z$

กำหนดให้ $f = \{(i, 2), (t, 0), (m, 2), (c, 0)\}$

และ $g = \{(2, i), (5, t), (6, m), (3, c)\}$

เมื่อพิจารณาความสัมพันธ์ f, f^{-1}, g, g^{-1}

จงตรวจสอบว่าในบรรดาความสัมพันธ์ข้างต้นมีความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชัน

A. 0
D. 3

B. 1
E. 4

C. 2

7. กำหนดให้ $f : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$ ที่นิยามโดย

$f(n)$ มีค่าเท่ากับหลักหน่วยของ $1! + 2! + 3! + \dots + n!$

จงหาผลบวกของสมาชิกทุกตัวในเรนจ์ของ f

A. 9
D. 45

B. 13

C. 20

E. ตั้งแต่ข้อ A. ถึง D. ไม่มีข้อใดถูก

8. กำหนดให้ $S = \{2, 5, 6, 3\}$ และ $P = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ เป็นจำนวนเฉพาะ}\}$

พิจารณาประพจน์ต่อไปนี้

(1) $\forall x \exists y [x + y \in P]$

(2) $\exists x \forall y [x + y \in P]$

(3) $\forall x \exists y [(x^2 + y^2) \in P]$

(4) $\exists x \forall y [(x^2 + y^2) \in P]$

จากประพจน์ทั้งสี่ข้างต้นนี้มีกี่ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง

A. 0
D. 3

B. 1
E. 4

C. 2



การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

9. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนจริง $\mathbb{R}$

$$X \text{ แทนเซตคำตอบของสมการ } \sqrt{x - 2020} = \sqrt{2563}$$

$$Y \text{ แทนเซตคำตอบของสมการ } \sqrt{(x - 2020)^2} = \sqrt{2563^2}$$

$$Z \text{ แทนเซตคำตอบของสมการ } x - 2020 = 2563$$

ข้อใดต่อไปนี้อาจกล่าวได้ถูกต้อง

A. $X = Z \subset Y$

B. $X = Y \subset Z$

C. $Y = Z \subset X$

D. $X = Z = Y$

E. ตั้งแต่ข้อ A. ถึง D. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

10. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 + 4x + 2y + 5 = 0\}$

ข้อใดต่อไปนี้อาจกล่าวได้ถูกต้องเกี่ยวกับกราฟของความสัมพันธ์ r

A. r มีกราฟเป็นรูปวงกลม

B. r มีกราฟเป็นรูปวงรี

C. r มีกราฟเป็นรูปไฮเพอร์โบลา

D. r มีกราฟเป็นรูปพาราโบลา

E. ตั้งแต่ ข้อ A. ถึง D. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

11. กำหนดให้ $A = \{a, b, c, d, \dots, x, y, z\}$

และ $B = \{1, 2, 3, \dots, 25, 26\}$

ถ้า $p: A \rightarrow B$ ถูกนิยามโดย $p(x)$ มีค่าเท่ากับลำดับของตัวอักษรที่เรียงตามลำดับพจนานุกรมในภาษาอังกฤษของ x นั่นคือ $p(a) = 1, p(b) = 2, \dots, p(z) = 26$

จงหาค่าของ $p(i) + p(t) + p(m) + p(c)$

A. 27

B. 36

C. 40

D. 45

E. 53



การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

12. กำหนดให้ $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ที่นิยามโดย

$$f(x) = \frac{20x + 19}{20x - 19} \text{ และ } g(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$$

ถ้า k เป็นจำนวนจริงซึ่งทำให้ $f^{-1}(x) = k \cdot g(x)$

แล้ว จงหาค่าของ $(g \circ f)(2k)$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

E. ตั้งแต่ข้อ A ถึง D ไม่มีข้อใดถูกต้อง

ตอนที่สอง ข้อ 13 – 24 ตอบถูกได้คะแนนข้อละ 6 คะแนน

ไม่ตอบได้คะแนนข้อละ 1.5 คะแนน ตอบผิดได้ 0 คะแนน

13. กำหนดให้ S แทนเซตคำตอบของสมการ $|x^3 + 5x| \leq 2020x$

และ $T = S \cap \mathbb{Z}$

จงหาจำนวนสมาชิกของเซต T

A. 45

B. 44

C. 90

D. 88

E. 1010

14. กำหนดให้ $f(x)$ เป็นพหุนามที่มีสมบัติต่อไปนี้ครบทุกข้อ

(1) $f(x)$ มีดีกรีเท่ากับ 3

(2) สัมประสิทธิ์ของ $f(x)$ เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

และ (3) $f(1) = 3$

จงหาว่ามีพหุนาม $f(x)$ ที่สอดคล้องเงื่อนไขข้างต้นครบทุกข้อทั้งหมดกี่พหุนาม

A. 5

B. 7

C. 10

D. 15

E. 20



การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

15. กำหนดให้ $d_1, d_2, \dots, d_k$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่แตกต่างกันทั้งหมดซึ่งหาร 2019 ได้ลงตัว และ $P(x) = (x - d_1)(x - d_2) \cdots (x - d_k)$
ถ้า $M = \{x \in \mathbb{N} \mid P(x) < 0\}$
แล้ว จำนวนสมาชิกของเซต M เท่ากับเท่าใด
- A. 1345 B. 1346 C. 1348
D. 1349 E. 1350

16. กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ที่นิยามโดย $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$
และ $R_f = [a, b]$ เรนจ์ของฟังก์ชัน f
จงหาค่าของ $a^2 + b^2$
- A. 1 B. 1.5 C. 2
D. 2.5 E. ตั้งแต่ข้อ A ถึง D ไม่มีข้อใดถูกต้อง



การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

17. กำหนดให้ C เป็นวงกลมที่มีสมการคือ $x^2 + y^2 = 25$

วงกลม C ตัดแกน x ที่จุด $M(m, 0)$, $N(n, 0)$ โดยที่ $m < 0$ และ $n > 0$

ให้ E เป็นวงรีวงหนึ่งที่มีความยาวแกนเอกเท่ากับ 14 หน่วย

จุดโฟกัสทั้งสองของ E คือ จุดตัดแกน x ทั้งสองของวงกลม C

ถ้าจุดตัดของวงรี E กับวงกลม C ที่อยู่ในจุดภาคที่ 1, 2, 3, 4 คือ P_1, P_2, P_3, P_4 ตามลำดับ

แล้ว จงหาว่าพื้นที่ของสี่เหลี่ยม P_1MP_3N เท่ากับกี่ตารางหน่วย

A. 48

B. 24

C. 25.2

D. 50

E. 100



การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

18. กำหนดให้ E เป็นวงรีที่มีพิกัดของจุดยอดทั้งสองคือ $(-10, 0)$, $(10, 0)$ และมีความยาวโฟกัสเท่ากับ $\frac{50}{7}\sqrt{7}$ หน่วย และ H เป็นไฮเพอร์โบลาที่มีพิกัดของจุดยอดทั้งสองคือ $(-2, 0)$, $(2, 0)$ และมีความยาวโฟกัสเท่ากับ $2\sqrt{7}$ หน่วย

จงหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมที่เกิดจากจุดตัดทั้งหมดระหว่างวงรี E และ ไฮเพอร์โบลา H

A. 24
D. 35

B. 28
E. 48

C. 30

19. กำหนดให้ $T = \{1, 2, 3, \dots, 2020\}$

ให้ $A = \{(a, b) \in T \times T \mid \sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}\}$

จงหาจำนวนสมาชิกของเซต A

A. 1010
D. 1896

B. 1520
E. 1936

C. 1728



การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

20. สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n

ให้ $S(n)$ คือผลบวกของเลขโดดในแต่ละหลักของจำนวนเต็มบวก n

และ $P(n)$ คือผลคูณของเลขโดดในแต่ละหลักของจำนวนเต็มบวก n

เช่น $P(29) = 2 \times 9 = 18$ และ $S(29) = 2 + 9$

จงหาว่ามีจำนวนเฉพาะบวกสองหลัก n ทั้งหมดกี่จำนวนที่สอดคล้องกับ $n = S(n) + P(n)$

A. 5

B. 8

C. 10

D. 12

E. 15

21. กำหนดให้ $P(x) = x^4 + 8x^3 - 11x^2 - 18x$

และ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x^2) = 0\}$

จงหาจำนวนสมาชิกของเซต A

A. 4

B. 6

C. 8

D. 9

E. ตั้งแต่ข้อ A. ถึง D. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

22. กำหนดให้ $X = \{i, t, m, c, 2, 5, 6, 3\}$

ให้ $S = \{Y \in P(X) \mid \{t, m, c\} \subset Y \text{ แต่ } \{2, 5, 6, 3\} \not\subset Y\}$

จงหาจำนวนสมาชิกของเซต S

A. 15

B. 16

C. 24

D. 30

E. 32



การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

23. สมการพหุนาม $(x-2)(x-5)(x-6)(x-3) = 1$ มีรากที่เป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกัน 4 รากได้แก่ i, t, m, c

ให้ X แทนเซตคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $(x+i)(x+t)(x+m)(x+c) = -1$

ให้ Y แทนเซตคำตอบที่เป็นจำนวนจริงของสมการ $(x-i)(x-t)(x-m)(x-c) = -1$

จงหาผลบวกของค่าสัมบูรณ์ของแต่ละสมาชิกในเซต $X \cup Y$

A. 16

B. 20

C. 32

D. 40

E. 44

24. กำหนดให้ $r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$

และ $r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| + |y| \geq 2\}$

อาณาบริเวณที่แทนเซต $r_1 \cap r_2$ มีพื้นที่กี่ตารางหน่วย

A. $4\pi - 8$

B. $4\pi - 4$

C. 16

D. $16\pi - 8$

E. ตั้งแต่ข้อ A. ถึง D. ไม่มีข้อใดถูกต้อง



การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

ให้นักเรียนใช้ข้อมูลที่กำหนดให้ต่อไปนี้เพื่อตอบคำถามข้อที่ 25 – 30

สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ จำนวนเต็มที่ยิ่งใหญ่ที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ x จะเขียนแทนด้วย $\lfloor x \rfloor$
เรียกว่า ส่วนที่เป็นจำนวนเต็ม (integer part) ของ x
และ เรียก $x - \lfloor x \rfloor$ ว่า ส่วนที่เป็นทศนิยม (decimal part) ของ x เขียนแทนด้วย $\{x\}$

จากบทนิยามเราจะพบว่าสำหรับจำนวนจริง x ใดๆ จะสามารถเขียนได้ในรูป $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$

$$\text{ตัวอย่าง } \lfloor 3 \rfloor = 3, \lfloor 6.25 \rfloor = 6, \lfloor -6.25 \rfloor = -7, \left\lfloor \frac{22}{7} \right\rfloor = 3$$

เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\lfloor x \rfloor$ และ $\{x\}$ มีสมบัติต่อไปนี้

- (1) $0 < \{x\} < 1$ ทุกค่า $x \in \mathbb{R}$
- (2) $\{x\} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x \in \mathbb{Z}$
- (3) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ สำหรับทุก $x \in \mathbb{R}$
- (4) ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $x \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $\lfloor n + x \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$
- (5) $\lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -\lfloor x \rfloor - 1 & ; x \notin \mathbb{Z} \\ -\lfloor x \rfloor & ; x \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\lfloor x \rfloor$ ยังมีชื่อเรียกอีกชื่อหนึ่งว่า ฟังก์ชันพื้น (Floor function)

และได้กำหนดสัญลักษณ์ $\lceil x \rceil$ เรียกว่า ฟังก์ชันเพดาน (Ceiling function)

โดยที่มีความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันทั้งสองนี้คือ $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$



การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

ตอนที่สาม ข้อ 25 – 29 ตอบถูกได้คะแนนข้อละ 7 คะแนน

ตอบผิด หรือไม่ตอบได้ 0 คะแนน

ในกรณีที่นักเรียนคำนวณได้คำตอบที่ไม่เป็นจำนวนเต็ม ให้ตอบเป็นจำนวนเต็มที่มีค่าใกล้เคียงที่สุด และในกรณีที่นักเรียนคำนวณได้คำตอบที่มีค่ามากกว่าห้าหลัก ให้ตอบเฉพาะตัวเลขในห้าหลักสุดท้าย

กำหนดลำดับของจำนวนเต็มบวก $a_n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ และ $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ โดยที่ $n \in \mathbb{N}$

25. กำหนดให้ m, n เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง ห.ร.ม. ของ m และ n เท่ากับ 1 ที่สอดคล้องกับ

$$\frac{m}{n} = \frac{a_1 \cdot a_3 \cdot a_5 \cdots a_{99} \cdot a_{101}}{a_2 \cdot a_4 \cdot a_6 \cdots a_{100} \cdot a_{102}}$$

จงหาค่าของ $m + n$

26. จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่มากที่สุดที่ทำให้ $\frac{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_{2019} \cdot a_{2020}}{2^n}$ เป็นจำนวนเต็ม



การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

27. จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่มากที่สุดที่น้อยกว่า 2563 ซึ่งทำให้ $\sqrt{S_{2563} - S_k}$ เป็นจำนวนเต็มบวก

28. กำหนดให้ $a = \{\sqrt{20}\}$ และ $b = \{\sqrt{19}\}$

จงหาค่าของ $\left| \frac{3a^2 - 4b^2}{3a - 4b} \right|$

29. กำหนดให้ n ที่เป็นคำตอบที่ถูกต้องของข้อ 28

จงหาจำนวนเต็ม x ที่มากที่สุดที่สอดคล้องกับสมการ $\left\lfloor \sqrt{\left\lceil \sqrt{x} \right\rceil} \right\rfloor = \frac{n^2}{32}$



การแข่งขันคณิตศาสตร์ประเทศไทย ครั้งที่ 8

ข้อโบนัส นักเรียนเลือกทำ หรือไม่ทำก็ได้

ถ้าตอบถูกได้ 20 คะแนน ตอบผิดได้ -7 คะแนน ไม่ตอบได้ 0 คะแนน

ในกรณีที่นักเรียนคำนวณได้คำตอบที่ไม่เป็นจำนวนเต็ม ให้ตอบเป็นจำนวนเต็มที่มีค่าใกล้เคียงที่สุด และในกรณีที่นักเรียนคำนวณได้คำตอบที่มีค่ามากกว่าห้าหลัก ให้ตอบเฉพาะตัวเลขในห้าหลักสุดท้าย

30. กำหนดให้ k เป็นจำนวนจริงที่มีค่ามากที่สุดที่สอดคล้องกับสมการ

$$\frac{1}{\lfloor x \rfloor} + \frac{1}{\{x\}} = \frac{10}{x}$$

ถ้า k สามารถเขียนได้ในรูป $a - \sqrt{b}$ โดยที่ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก

แล้ว จงหาค่าของ $a + b$

เฉลยคำตอบ TMC@8 รอบประเมินศักยภาพ

Q	ม.4
1	D
2	C
3	B
4	D
5	C
6	D
7	B
8	C
9	A
10	E
11	D
12	B
13	A
14	C
15	B
16	B
17	A
18	E
19	E
20	A
21	E
22	D
23	C
24	A
25	319
26	1973
27	2561
28	8
29	80
30	770